武昌区 2021 届高三年级 5 月质量检测

数　　学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2-2x<0\}$， $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,1\le x\le 4\}$，则 $A\cup B=$　　(B)

A. $\{x\,|\,0<x<4\}$　　B. $\{x\,|\,0<x\le 4\}$　　C. $\{x\,|\,1\le x<2\}$　　D. $\{x\,|\,2<x\le 4\}$

2．已知向量 ***a***=(1，3)，则下列向量中与 ***a*** 垂直的是　　(D)

A.(0，0)　　B.(-3，-1)　　C.(3，1)　　D.(-3，1)

3．复数 $\dfrac{4\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$ 的虚部为　　(A)

A. 1　　B. -1　　C. $-\mathrm{i}$　　D. i

4．已知双曲线 C：$\dfrac{y^2}{m}-\dfrac{x^2}{m+2}=1(m>0)$，则 C 的离心率的取值范围为　　（C）

A. $(1,\sqrt{2})$　　B. $(1,2)$　　C. $(\sqrt{2},+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

5．2020 年我国 832 个贫困县全部“摘帽”，脱贫攻坚战取得伟大胜利. 湖北秭归是“中国脐橙之乡”，全县脐橙综合产值年均 20 亿元，被誉为促进农民增收的“黄金果”. 已知某品种脐橙失去的新鲜度 h 与其采摘后的时间 t（天）满足关系式：$h=m\cdot a^t$. 若采摘后 10 天，这种脐橙失去的新鲜度为 10%，采摘后 20 天失去的新鲜度为 20%，那么采摘下来的这种脐橙在多长时间后失去 50%的新鲜度（已知 $\lg 2\approx 0.3$，结果四舍五入取整数）　　(B)

A. 23 天　　B. 33 天　　C. 43 天　　D. 50 天

6．某班有 60 名学生参加某次模拟考试，其中数学成绩 ξ 近似服从正态分布 $N(110,\sigma^2)$，若 $P(100\le\xi\le 110)=0.35$，则估计该班学生数学成绩在 120 分以上的人数为　　(B)

A.10　　B.9　　C.8　　D.7

7．$(x+\dfrac{1}{x^2}-1)^4$ 展开式中的常数项为　　(A)

A．-11　　B．-7　　C．8　　D．11

8．桌面上有 3 个半径为 2021 的球两两相外切，在其下方空隙中放入一个球，该球与桌面和三个

球均相切，则该球的半径是　　(B)

A．$\frac{2021}{4}$　　B．$\frac{2021}{3}$　　C．$\frac{2021}{2}$　　D．2021

二、 选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分， 共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．某学校为了促进学生德、智、体、美、劳全面发展，制订了一套量化评价标准．下表是该校甲、乙两个班级在某次活动中的德、智、体、美、劳的评价得分（得分越高，说明该项教育越好）．下列说法正确的是　　(AC)

A．甲班五项得分的极差为 1.5

B．甲班五项得分的平均数高于乙班五项得分的平均数

C．甲班五项得分的中位数大于乙班五项得分的中位数

D．甲班五项得分的方差小于乙班五项得分的方差

	德	智	体	美	劳
甲班	9.5	9.5	9	9.5	8
乙班	9.5	9	9.5	9	8.5

10． 已知函数 $f(x)=\sin\omega x-\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$ ($\omega>0$) 在 $[0,\ \pi]$ 上的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$，则实数 ω 的值可能取　(ABC)

A.1　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D.2

11．已知 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点．设 P 是准线上的动点，过点 P 作抛物线 C 的两条切线，切点分别为 A，B，线段 AB 的中点为 M，则　　(ABC)

A．$|AB|$的最小值为 4　　B．直线 AB 过点 F

C．$PM\perp y$ 轴　　D．线段 AB 的中垂线过定点

12．已知实数 x，y，z 满足 $x+y+2z=1$，且 $x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2=1$，则下列结论正确的是　(ACD)

A． x 的最小值为 $-\frac{4}{5}$　　B． z 的最大值为 $\frac{1}{2}$

C． z 的最小值为 $-\frac{1}{5}$　　D． xyz 取最小值时 $z=\frac{16}{27}$

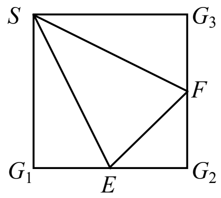
三、填空题：本题共 4 小题， 每小题 5 分，共 20 分．

13．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n+a_n=4$，则 $S_4=$__________．答案：$\frac{15}{4}$

14．抛掷 3 个骰子，事件 A 为“三个骰子向上的点数互不相同”，事件 B 为“其中恰好有一个骰子向上的点数为 2”，则 $P(A|B)=$__________．答案：$\frac{4}{5}$

15．已知函数 $f(x)=ax-x\sin x-2\cos x$ 在 $(0,2\pi)$ 上有两个极值点，则实数 a 的取值范围是__________.答案：$(-\pi,0)$

16．如图，在边长为 2 的正方形 $SG_1G_2G_3$ 中， E，F 分别是 G_1G_2，G_2G_3 的中点．若沿 SE，SF 及 EF 把这个正方形折成一个四面体，使 G_1，G_2，G_3 三点重合，重合后的点记为 G，则：（1）



三棱锥 S-EFG 外接球的表面积为__________；（2）点 G 到平面 SEF 的距离为__________.

答案：（1）6π；(2 分)　（2）$\frac{2}{3}$.（3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1 \in (0,2)$，$a_n{}^2+3a_n+2=6S_n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（1）当 $n=1$ 时，由 $a_n{}^2+3a_n+2=6S_n$，得 $a_1{}^2+3a_1+2=6S_1=6a_1$，即 $a_1{}^2-3a_1+2=0$.

又 $a_1 \in (0,2)$，解得 $a_1=1$.

由 $a_n{}^2+3a_n+2=6S_n$，可知 $a_{n+1}{}^2+3a_{n+1}+2=6S_{n+1}$，

两式相减，得 $a_{n+1}{}^2-a_n{}^2+3(a_{n+1}-a_n)=6a_{n+1}$，即 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$，

由于 $a_n>0$，可得 $a_{n+1}-a_n=3$，所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 3 的等差数列，

所以 $a_n=3n-2$.　……………………5 分

(2)因为 $a_n=3n-2$，所以 $b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$，

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$，　……10 分

18.（12 分）

在① $\cos B=-\frac{3}{5}$；② $b+c=2\sqrt{3}$；③ $a=\sqrt{6}$，这三个条件中选择两个，补充在下面问题中，使问题中的三角形存在，并求出 ΔABC 的面积.

问题： 在 ΔABC 中，a，b，c 是角 A，B，C 所对的边，已知 $a\sin C=\sqrt{3}c\cdot\cos A$，补充的条件是__________和__________.

解： 因为 $a\sin C=\sqrt{3}c\cdot\cos A$，所以 $\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos A$.

又 $\sin C \neq 0$，所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，即 $\tan A=\sqrt{3}$.

$\because A\in(0,\ \pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………4 分

若选①，$\cos B=-\dfrac{3}{5}<-\dfrac{1}{2}$，$\therefore B\in(\dfrac{2\pi}{3},\ \pi)$，则 $A+B+C>\pi$，三角形不存在；

因此，只能选择②和③

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}$，$\therefore \dfrac{1}{2}=\dfrac{6-2bc}{2bc}$，$\therefore bc=2$，

与 $b+c=2\sqrt{3}$ 联立，解得 $b=\sqrt{3}+1$，$c=\sqrt{3}-1$；或 $b=\sqrt{3}-1$，$c=\sqrt{3}+1$，

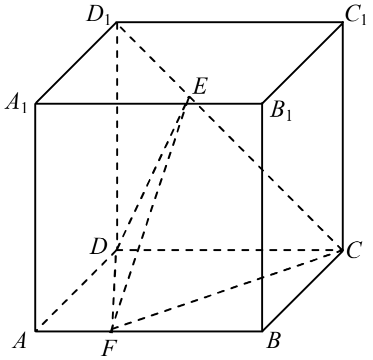
所以，符合条件的 ΔABC 存在，且 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………12 分

19.（12 分）

如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 在线段 CD_1 上，$CE=2ED_1$，点 F 为线段 AB 上的动点，$AF=\lambda FB$，且 EF//平面 ADD_1A_1.

（1）求 λ 的值；

（2）求二面角 $E\text{-}DF\text{-}C$ 的余弦值.



解：（1）**方法一**：过 E 作 $EG\perp D_1D$ 于 G，连结 GA.

则 EG//CD，而 CD//FA，所以 EG//FA.

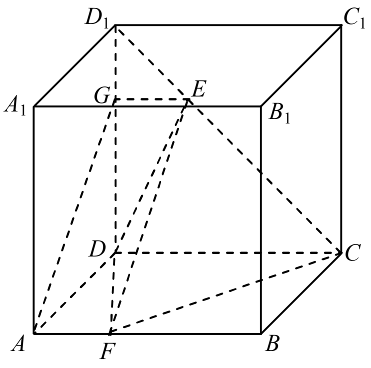
因为 EF//平面 ADD_1A_1，$EF\subset$平面 $EFAG$，

平面 $EGAF\cap$平面 $ADD_1A_1=GA$，所以 EF//GA，

所以四边形 $EGAF$ 是平行四边形，所以 $GE=AF$.

因为 $CE=2ED_1$，所以 $\dfrac{GE}{DC}=\dfrac{D_1E}{D_1C}=\dfrac{1}{3}$.

所以 $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{1}{3}$，即 $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$. …………6 分



方法二：

延长 CF 交线段 DA 的延长线于 M，连 D_1M.

因为 EF // 平面 ADD_1A_1，所以 EF // D_1M.

所以 $\dfrac{MF}{FC}=\dfrac{D_1E}{EC}=\dfrac{1}{2}$. 又因为 AD // BC，

所以 $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{MF}{FC}=\dfrac{1}{2}$，即 $\lambda=\dfrac{1}{2}$. ……………………6 分

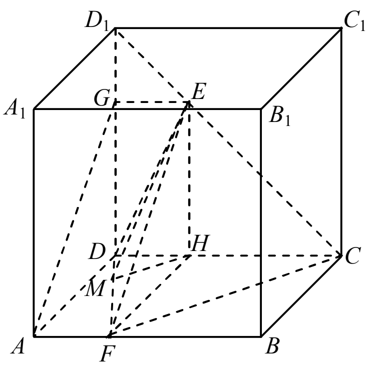
（2）**方法一**：过 E 作 $EH\perp CD$ 于 D，过 H 作 $HM\perp DF$ 于 M，连结 EM.

因为平面 $CDD_1C_1\perp$平面 $ABCD$，$EH\perp CD$，

所以 $EH\perp$平面 $ABCD$.

因为 $DF\subset$平面 $ABCD$，所以 $EH\perp DF$.

又 $HM \perp DF$，所以 $DF \perp$ 平面 EMH.
因为 $EM \subset$ 平面 EMH，所以 $DF \perp EM$.
所以 $\angle EMH$ 是二面角 E-DF-C 的平面角.
设正方体的棱长为 $3a$，则 $EH=2a$.



在 $\text{Rt}\Delta DHF$ 中，DH= a，HF=$3a$，DF= $\sqrt{10}a$，

所以 $HM=\dfrac{DH\times HF}{DF}=\dfrac{a\times 3a}{\sqrt{10}a}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}a$.

在 $\text{Rt}\Delta EHM$ 中，求得 $EM=\sqrt{EH^2+HM^2}=\dfrac{7}{\sqrt{10}}a$，

所以 $\cos\angle EMH=\dfrac{HM}{EM}=\dfrac{3}{7}$，即为所求. ……………………………12 分

方法二：

以 D 坐标原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系.

设正方体棱长为 3，则 $D(0，0，0)$，E（0，1，2），F（3，1，0），C（0，3，0）.

设平面 EDF 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{DE}$ ＝（0，1，2），$\overrightarrow{DF}$ ＝（3，1，0）.

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{DF}\cdot\vec{m}=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+2z=0,\\ 3x+y=0.\end{cases}$ 取 $x=2$，得 $\begin{cases}x=2\\ y=-6\\ z=3\end{cases}$，即 $\vec{m}=(2,-6,3)$.

取平面 CDF 的法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{DD_1}=(0,0,3)$，则 $\cos<\vec{n},\vec{m}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{9}{7\times 3}=\dfrac{3}{7}$.

所以二面角 $E-DF-C$ 的余弦值为 $\dfrac{3}{7}$. ……………………………12 分

20.（12 分）

某商场举行有奖促销活动，顾客购买一定金额商品后即可抽奖，每次抽奖都从装有 4 个红球、6 个白球的甲箱和装有 5 个红球、5 个白球的乙箱中，各随机摸出 1 个球，在摸出的 2 个球中，若都是红球，则获一等奖；若只有 1 个红球，则获二等奖；若没有红球，则不获奖.

（1）求顾客抽奖 1 次能获奖的概率；

（2）若某顾客有 3 次抽奖机会，记该顾客在 3 次抽奖中获一等奖的次数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

解：(1) 记事件 $A_1=\{$从甲箱中摸出的 1 个球是红球$\}$，$A_2=\{$从乙箱中摸出的 1 个球是红球$\}$，

$B_1=\{$顾客抽奖 1 次获一等奖$\}$，$B_2=\{$顾客抽奖 1 次获二等奖$\}$，$C=\{$顾客抽奖 1 次能获奖$\}$.

由题意，A_1与A_2相互独立，$A_1\overline{A_2}$与$\overline{A_1}A_2$互斥，B_1与B_2互斥，

且$B_1=A_1A_2$，$B_2=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$，$C=B_1+B_2$.

因为$P(A_1)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$，$P(A_2)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$，

所以$P(B_1)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}$，

$P(B_2)=P(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)$

$=P(A_1)(1-P(A_2))+(1-P(A_1))P(A_2)=\dfrac{2}{5}\times(1-\dfrac{1}{2})+(1-\dfrac{2}{5})\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

故所求概率为$P(C)=P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{10}$.　　………………6 分

（2）顾客抽奖 3 次可视为 3 次独立重复试验，由（1）知，顾客抽奖 1 次获一等奖的概率为$\dfrac{1}{5}$，

所以$X\sim B(3,\dfrac{1}{5})$. 于是

$P(X=0)=C_3^0(\dfrac{1}{5})^0(\dfrac{4}{5})^3=\dfrac{64}{125}$，$P(X=1)=C_3^1(\dfrac{1}{5})^1(\dfrac{4}{5})^2=\dfrac{48}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2(\dfrac{1}{5})^2(\dfrac{4}{5})^1=\dfrac{12}{125}$，$P(X=3)=C_3^3(\dfrac{1}{5})^3(\dfrac{4}{5})^0=\dfrac{1}{125}$.

故X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{64}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{1}{125}$

X的数学期望为$E(X)=3\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$.　　………………12 分

21.（12 分）

已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 2.

（1）求椭圆C的方程；

（2）设A,B为椭圆C上两点，O为坐标原点，$k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{1}{2}$. 点$D$在线段$AB$上，且$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，连接$OD$并延长交椭圆$C$于$E$，试问$\dfrac{|OE|}{|OD|}$是否为定值？若是定值，求出定值；若不是定值，请说明理由.

解：（1）由已知得$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$且$2c=2$，所以$a=\sqrt{2},c=1$.

所求椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.　　……………………4 分

（2）设点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),D(x_3,y_4)$，

由$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，得$\begin{cases}x_3=\frac{2x_1+x_2}{3},\\ y_3=\frac{2y_1+y_2}{3}.\end{cases}$

设$\frac{|OE|}{|OD|}=\lambda$，则结合题意可知$\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{OD}$，所以$E(\lambda x_3,\lambda y_3)$.

将点$E(\lambda x_3,\lambda y_3)$代入椭圆方程，得$\lambda^2(\frac{x_3^2}{2}+y_3^2)=1$.

即$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{x_3^2}{2}+y_3^2=\frac{(\frac{2x_1+x_2}{3})^2}{2}+(\frac{2y_1+y_2}{3})^2$.

变形，得$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{4}{9}(\frac{x_1^2}{2}+y_1^2)+\frac{4}{9}(\frac{x_1x_2}{2}+y_1y_1)+\frac{1}{9}(\frac{x_2^2}{2}+y_2^2)$（*）

又因为点 A，B 均在椭圆上，且$k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{1}{2}$，

所以$\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1,\\ \frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1,\\ k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{2},\end{cases}$　　代入（*）式解得$\lambda=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

所以$\frac{|OE|}{|OD|}$是定值，为$\frac{3\sqrt{5}}{5}$.　　………………………………………………………12 分

22.（12 分）

已知函数$f(x)=xe^x$.

（1）求$f(x)$在$x=-2$处的切线方程；

（2）已知关于 x 的方程$f(x)=a$有两个实根x_1，x_2，当$-\frac{1}{e}<a<-\frac{2}{e^2}$时，求证：$|x_1-x_2|<(e^2+1)a+4$.

解：（1）因为$f'(x)=(x+1)e^x$，所以$f'(-2)=-\frac{1}{e^2}$.

所以，在$x=-2$处的切线方程为$y=-\frac{1}{e^2}(x+2)-\frac{2}{e^2}$. 即$y=-\frac{1}{e^2}x-\frac{4}{e^2}$.　　…………4 分

（2）由（1）知，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 单调递增.

因为 $f(-1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$f(-2)=-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$.

当 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$ 时，方程 $f(x)=a$ 有两个实根 x_1，x_2，则 $x_1,x_2\in(-2,0)$.

令 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x+\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(-2<x<0)$，则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x>0$.

所以 $g'(x)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递增，所以 $g'(x)>g'(-2)=0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(-2)=0$，所以 $g(x_1)>0$.

所以 $a=f(x_1)=g(x_1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x_1-\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}>-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x_1-\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$，　所以 $-(\mathrm{e}^2a+4)<x_1$.

当 $x\in(-2,0)$ 时，$x\mathrm{e}^x>x$，所以 $a=f(x_2)>x_2$.

所以 $|x_2-x_1|<a+\mathrm{e}^2a+4=(\mathrm{e}^2+1)a+4$.　……………………………………12 分